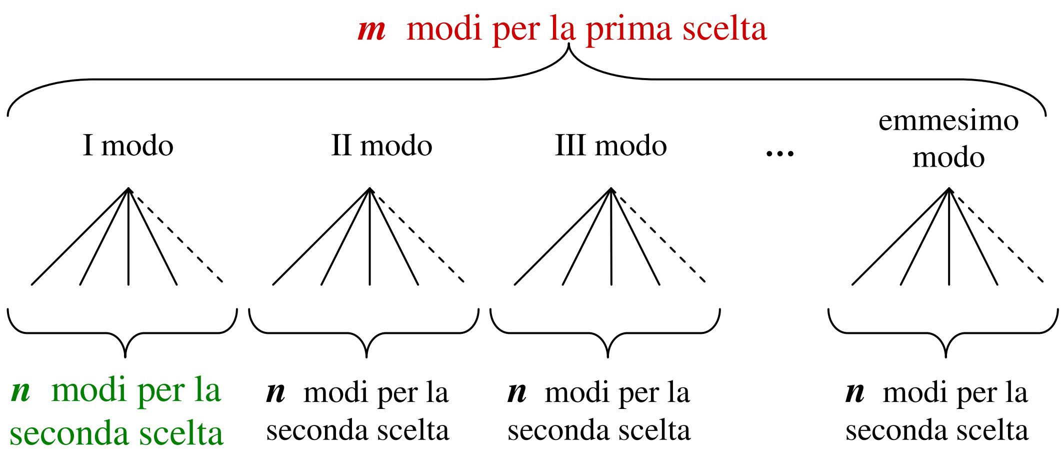
PRINCIPI PER CONTARE

PRINCIPIO DI MOLTIPLICAZIONE

Se una scelta può essere fatta in *m* modi e una seconda scelta in *n* modi, allora ci sono *m x n* modi di fare la prima scelta e (et) di seguito la seconda scelta, vale a dire le due scelte insieme.

(cioè per ognuna delle prime *m* possibili scelte ci sono *n* successive possibili scelte).



Quindi

n+n+n+ ... per m volte

e cioè è la stessa cosa scrivere

m x n

Se le scelte sono più di due ad esempio quattro: *m* e poi *n* e poi *p* e poi *q*, il numero dei modi in cui possono essere fatte tutte si ottiene moltiplicando

m x n x p x q

(vedi esercizio n.1).

1. Se non sono permesse ripetizioni

   a. Quanti numeri di tre cifre si possono formare con le sei cifre 2, 3, 5, 6, 7, 9?

   b. Quanti sono minori di 400?

   c. Quanti sono pari?

   d. Quanti sono dispari?

   e. Quanti multipli di 5?

   E se sono permesse ripetizioni?

SOLUZIONE

Un numero di tre cifre è composto da centinaia-decine-unità

Devo quindi scegliere la cifra delle centinaia, quella delle decine, quella delle unità. Posso iniziare da dove voglio a seconda dell'opportunità.

- Senza ripetizioni

a.

	I scelta	II scelta	III scelta
Numero delle scelte	6 modi	5 modi	4 modi
	6 x 5 x 4 = 120		

b.

	I scelta	II scelta	III scelta
Numero delle scelte	2 modi	5 modi	4 modi
	2 x 5 x 4 = 40		

c.

	III scelta	II scelta	I scelta
Numero delle scelte	4 modi	5 modi	2 modi
	2 x 5 x 4 = 40		

Per motivi analoghi si ha

d. 4 x 5 x 4 = 80 e. 1 x 5 x 4 = 20

E con ripetizioni?

a. 6^3	b. 2×6^2	c. 2×6^2	d. 4×6^2	e. 1×6^2

2. In quanti modi si possono mettere in fila in uno scaffale di una libreria 4 libri di matematica, 3 di fisica e 5 di storia dell'arte, se si desidera che i libri di ogni diversa disciplina siano tra loro vicini?

SOLUZIONE

Indichiamo con M il gruppo di libri di Matematica, con F il gruppo di libri di Fisica, con A il gruppo di libri di Arte. Innanzi tutto bisogna dire che i gruppi di libri, di Matematica, di Fisica, di Arte, possono essere sistemati in ordine diverso nello scaffale (3! modi): MFA, MAF, FMA, FAM, AMF, AFM.

M, F, A	I scelta	II scelta	III scelta
Numero delle scelte	3 modi	2 modi	1 modi
	3x2x1 = 3! = 6		

Per ognuno di questi modi ci sono 4! modi di mettere in ordine quelli di matematica, per ognuno di questi modi ci sono 3! modi di mettere in ordine quelli di fisica, e ancora per ognuno di questi ci sono 5! modi di mettere in ordine quelli di arte. Quindi il numero dei modi in cui si possono sistemare nello scaffale è

4 libri di MATEMATICA	I scelta	II scelta	III scelta	IV scelta
Numero delle scelte	4 modi	3 modi	2 modi	1 modo
	4x3x2x1 = 4! =24			

3 libri di FISICA	I scelta	II scelta	III scelta
Numero delle scelte	3 modi	2 modi	1 modo
	3x2x1 = 3! = 6		

5 libri di ARTE	I scelta	II scelta	III scelta	IV scelta	V scelta
Numero delle scelte	5 modi	4 modi	3 modi	2 modi	1 modo
	5x4x3x2x1 = 5! = 120				

QUINDI 3! x 4! x 3! x 5! = 6 x 24 x 6 x 120 = 103680 modi

3. In quanti modi un gruppo di n persone

a. Si può disporre in **n** sedie allineate?

b. E in **sette** sedie allineate?

c. In quanti modi, in n sedie, intorno a un tavolo circolare?

d. In quanti modi, in **7** sedie, intorno a un tavolo circolare?

SOLUZIONE

a. $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 1 = n! = P_n$ modi

b. $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-6) = D_{n,7} =$

c. $n! / n = (n-1)!$

d. $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-6) / 7 = D_{n,7}/7$

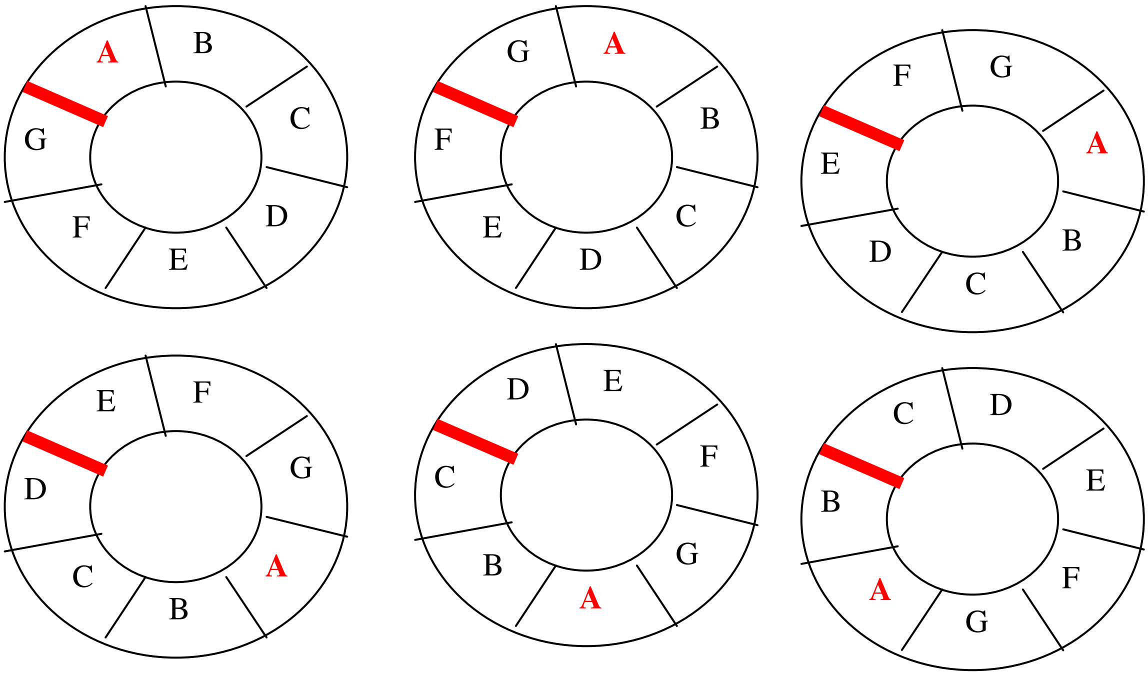
Se n=20 e devo fare gruppi di 7 in cui è importante l'ordine ho 20x19x18x17x16x15x14 = 390700800 possibili raggruppamenti.
Nella seguente tabella sono rappresentati 7 dei possibili raggruppamenti, dove gli elementi sono sempre gli stessi, cambia solo l'ordine, è stata fatta scorrere la fila in modo che quelli che escono dal fondo rientrano ai primi posti. Sono raggruppamenti diversi perché non sempre tutti gli elementi si trovano vicino alle stesse persone.

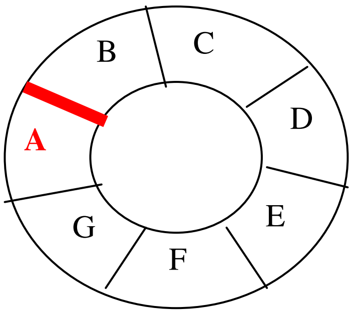
I	II	III	IV	V	VI	VII
A	B	C	D	E	F	G
G	A	B	C	D	E	F
F	G	A	B	C	D	E
E	F	G	A	B	C	D
D	E	F	G	A	B	C
C	D	E	F	G	A	B
B	C	D	E	F	G	A

INTORNO AD UN TAVOLO ROTONDO

Se le stesse persone invece le facciamo sedere intorno ad un tavolo circolare, possiamo notare che le sette disposizioni di cui sopra sono le stesse, in quanto ogni individuo ha sempre alla sua destra e alla sua sinistra le stesse persone e non esiste il primo posto.

Dei gruppi ottenuti ruotando in 7 modi si ottiene sempre la stessa disposizione. Quindi i 390700800 possibili raggruppamenti si possono raggruppare per 7, perché sono uguali tra loro. Da ciò segue che bisogna dividere il numero di raggruppamenti, trovati quando si è disposto in fila le persone, per 7, se i posti intorno al tavolo sono 7, o per n se i posti sono n.





Se si devono disporre 7 persone intorno ad un tavolo rotondo
A, o un qualunque altro del gruppo, può mettersi dove vuole intorno al tavolo circolare (è infatti indifferente dove si mette), le altre 6 persone hanno a disposizione quindi solamente 6 posizioni tra cui poter scegliere).

4. In quanti modi si possono mettere intorno a una tavola rotonda 5 bambini, 4 donne, 3 uomini, se si desidera che i bambini siano vicini, e così le donne e gli uomini?

SOLUZIONE
L'unica cosa che cambia, rispetto al primo problema, è il numero dei modi diversi in cui possono essere messi in ordine i tre gruppi di bambini, donne e uomini, B-D-U, intorno a un tavolo rotondo.
Infatti BDU, UBD, DUB, sono equivalenti: infatti il gruppo BDU, in cui B precede D, è stato fatto ruotare in senso orario, e così può essere fatto per il gruppo DBU, in cui D precede B (DBU, UDB, BUD). Non ci sono altre possibilità: due soli possibili modi diversi, proprio perché in tutto sono 6 modi, ma di questi 6 devo fare gruppi di 3 disposizioni equivalenti (6:3=2).

Se ci fossero stati 4 gruppi diversi da sistemare, i 24 possibili ordinamenti lineari, potevano essere raggruppati per 4, i 4 tra loro equivalenti che si determinano facendo ruotare i 4 gruppi ad esempio in senso orario (ABCD, DABC, CDAB, BCDA). Si può osservare che i 4 ordinamenti sono equivalenti in quanto in tutti e quattro ogni elemento, ad esempio A, si ritrova sempre ad avere alla sinistra sempre B e alla destra sempre D.

CONCLUSIONE: se sono 4 gruppi allora 4!/4=3!, se sono 3 gruppi allora 3!/3=2! E così via.

Per il nostro problema

2!5!4!3! = 34560 modi diversi di stare intorno a un tavolo circolare

PIU' SINTETICAMENTE: il gruppo B può mettersi dove vuole intorno al tavolo circolare (è infatti indifferente dove si mette), gli altri due gruppi hanno a disposizione solamente 2 posizioni tra cui poter scegliere)

In tutti i precedenti problemi era importante l'ordine. Due gruppi erano diversi se c'era almeno un oggetto diverso o se l'ordine era diverso. Abbiamo quindi considerato quelle che si chiamano Disposizioni e Permutazioni.

DISPOSIZIONI

(vedi problema 1)

Senza ripetizioni $D_{n,k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$

Con ripetizioni $D^r_{n,k} = n \times n \times n \times n \ldots = n^k$

PERMUTAZIONI

(vedi problema sul "mettere in fila" o il 5 sugli angrammi)

Senza ripetizioni $P_n = n!$ 0!=1!=1 per definizione

Con ripetizioni $P^r_n = \dfrac{n!}{k!m!}$

5. ANAGRAMMI

a. Quanti anagrammi diversi si possono fare con la parola "tralcio"?
   i. $P_n = 7! = 7x6x5x4x3x2x1 = 5040$
b. E con la parola costoso?
   i. $P^r_n = \dfrac{7!}{3!2!} = \dfrac{7x6x5x4x3x2x1}{3x2x1x2x1} = 420$

PRINCIPIO DI ADDIZIONE

Se invece le due (o più scelte), non possono essere fatte insieme, ma deve essere fatta solo l'una o (vel esclusivo o aut o xor) solo l'altra, o solo l'altra ancora ..., allora il numero delle scelte *m* si addiziona al numero di scelte *n* e si ottiene m+n se le scelte da fare sono due, m+n+p+q se le scelte da fare sono quattro ....

- Uno studente desidera seguire o un solo corso: di fisica o di matematica o di scienze. Nell'ipotesi che siano disponibile 2 corsi di fisica, 3 di matematica e 3 di scienze, in quanti modi può fare la sua scelta lo studente?

  2+3+3=8 modi

- Lanciamo un dado. Se puntiamo su "esce un numero maggiore di 3 o pari" quanti possibili uscite a noi favorevoli abbiamo?

  "Esce un numero maggiore di tre" può essere o il 4, o il 5, o il 6

  "Esce un numero pari" oltre a quelli maggiori di tre, può essere il 2

Applicando il principio di addizione si ottiene

3+1 = 4 uscite favorevoli.

Applicazione del principio di moltiplicazione e di addizione nel seguente esercizio (è importante anche l'ordine).

- Un ragazzo che frequenta una ragazza di nascosto dai genitori di lei, si reca la sera sotto la finestra della sua bella con quattro luci di colori diversi per poter comunicare con l'innamorata senza parlare e anche ad una certa distanza.
  Quanti messaggi diversi può formulare per la sua bella, accendendo o spegnendo le varie lucii: G=gialla V=verde R=rossa B=bianca

- 4 con una sola luce: G o V o R o B. Oppure
- 12 con due sole luci: 4 possibilità per la scelta della prima luce, e per ognuna di queste 3 possibilità per la scelta della seconda luce. Oppure
- 24 con 3 sole luci: 4 possibilità per la scelta della prima luce, e per ognuna di queste 3 possibilità per la scelta della seconda luce, e per ognuna delle 4x3 scelte altre 2 per la scelta della terza luce. Oppure
- 24 con tutte e 4 le luci: 24 con 3 sole luci: 4 possibilità per la scelta della prima luce, e per ognuna di queste 3 possibilità per la scelta della seconda luce, e per ognuna delle 4x3 scelte precedenti altre 2 per la scelta della terza luce, ed infine per ognuna delle 24 precedenti scelte ce n'è una sola per la quarta luce.

Quindi

4 + 4x3 + 4x3x2 + 4x3x2x1 = 4 + 12 + 24 + 24 = 64 modi

ESERCIZI NEI QUALI NON È IMPORTANTE L'ORDINE

LE COMBINAZIONI $C_{n,k}$ (senza ripetizione)

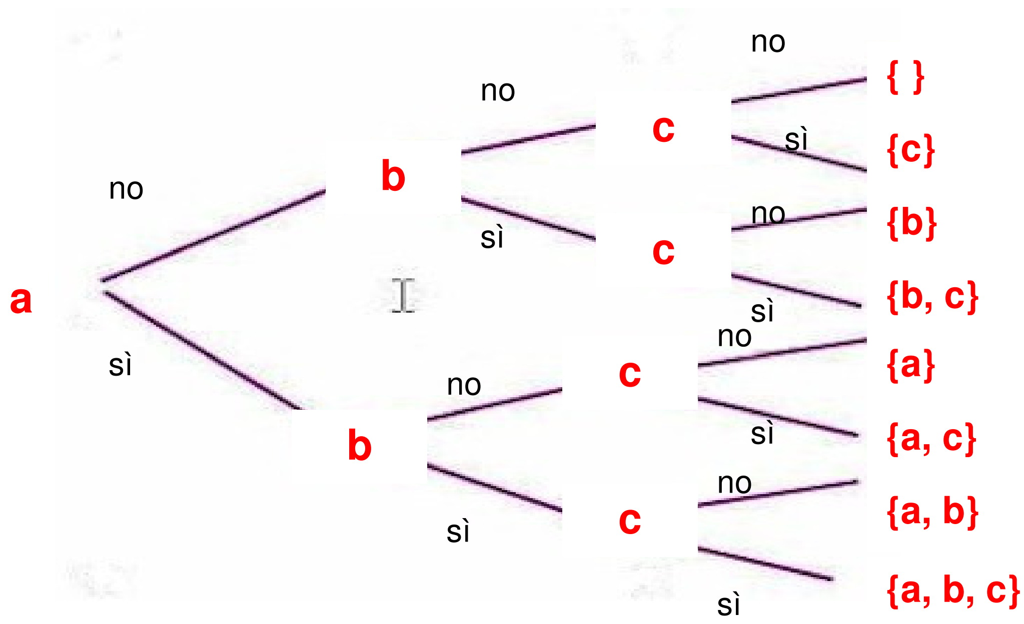
1. Trovare il numero di sottoinsiemi che si possono fare con un insieme E di n elementi (considerando anche l'insieme vuoto e l'insieme E stesso)

2^n sottoinsiemi

Infatti si può procedere considerando l'insieme vuoto, poi n insiemi composti da 1 elemento, poi nx(n-1)/2 insiemi con due elementi, ecc fino all'ultimo insieme con n elementi.
Per capire meglio vedi l'esempio del recipiente con le molecole del gas e facciamo anche un altro esempio:

E = {a, b, c}

QUANTI SOTTINSIEMI?
1 insieme senza elementi (insieme vuoto) + 3 insiemi con un elemento + 3x2/2 insiemi con due elementi + 1 insieme con n elementi = 1+3+3+1 = 2^3 = 8
SI PUÒ COSTRUIRE UN ALBERO BINARIO
Ad ogni diramazione, per ogni elemento dell'insieme, la domanda è: "appartiene all'insieme?" a sinistra è no, a destra è sì.



Ci sono 3 livelli: 1x2x2x2
Ad ogni diramazione si raddoppiano le uscite, quindi

2^3 = 8 sottinsiemi

2. In quanti modi si può formare una commissione di 4 del PD e 3 del PDL scelti fra 7 del PD e 5 del PDL?

In questo caso gruppi formati con le stesse persone devono essere considerati lo stesso gruppo, diversamente dalle disposizioni per le quali invece è anche importante l'ordine, dato che due gruppi sono considerati diversi anche se differiscono solo per l'ordine.

Per questo si divide per 4! e per 3!.

$$(7 \times 6 \times 5 \times 4 / 4!) \times (5 \times 4 \times 3 / 3!)$$

3. In quanti modi un insegnante può scegliere uno o più studenti tra 10 studenti?

Anche in questo caso, come per il problema 1, bisogna determinare tutti i possibili sottoinsiemi di studenti, PERÒ è escluso l'insieme vuoto, quindi

$$2^{10} - 1$$

Oppure è lo stesso considerare gruppi di uno o di due o … elementi senza tenere conto dell'ordine. E cioè:

$$C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} + C_{10,5} + C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} + C_{10,10}$$

$$10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1$$

4. Dati 10 punti di un piano, 3 dei quali non risultano mai allineati, quante rette si possono tracciare congiungendo i punti a due a due?

I punti sono A B C D E F G H I L
Devo trovare tutte le possibili COMBINAZIONI di due dei 10 punti, senza tenere conto dell'ordine. È importante che 3 non risultino mai allineati.

Per scegliere il primo punto ho 10 possibilità.

Per il secondo punto ho 9 possibilità e sono sicura che nessun altro punto dei 10 sta sulla retta appena individuata.

AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AL
BA	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI	BL
CA	CB	CD	CE	CF	CG	CH	CI	CL
DA	DB	DC	DE	DF	DG	DH	DI	DL
EA	EB	EC	ED	EF	EG	EH	EI	EL
FA	FB	FC	FD	FE	FG	FH	FI	FL
GA	GB	GC	GD	GE	GF	GH	GI	GL
HA	HB	HC	HD	HE	HF	HG	HI	HL
IA	IB	IC	ID	IE	IF	IG	IH	IL
LA	LB	LC	LD	LE	LF	LG	LH	LI

Per non tenere conto dell'ordine devo dividere per 2, infatti AB e BA, AC e CA … ecc. sono la stessa retta. Posso fare gruppi di due dei 90 gruppi appena realizzati. Quindi sono solo 45 le rette che posso tracciare

$$(10 \times 9) / 2 = 45$$

5. IL GIOCO DEL LOTTO

a. Quante cinquine che cominciano con un numero prefissato si possono formare?
   i. $C_{89,4} = (89 \times 88 \times 87 \times 86) / 4!$

b. Qual è la probabilità di azzeccare "l'estratto semplice"?
   i. Gioco un numero, ad esempio il 20, e spero che esca.

   I casi possibili sono le cinquine non ordinate costruibili con i 90 numeri del lotto

   $C_{90,5} = (90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86) / 5!$

   I casi favorevoli sono tanti quante le cinquine che contengono il 20.

   $C_{89,4} = (89 \times 88 \times 87 \times 86) / 4!$

   La probabilità è $C_{89,4} / C_{90,5} = 1/18$

c. Quante sono le cinquine che contengono un determinato terno?
   i. $C_{87,2} = (87 \times 86) / 2$

d. Quante le cinquine che contengono una quaterna?
   i. $C_{86,1} = 86$

e. Quante le cinquine che contengono il 36?
   i. $C_{89,4} = (89 \times 88 \times 87 \times 86) / 4!$

PRINCIPIO DEI CASSETTI

Se n+1 oggetti sono posti in n caselle, allora almeno una casella contiene due o più oggetti.

Il principio della piccionaia
Il principio della piccionaia afferma che se **p** piccioni devono trovare posto in **c** caselle e ci sono più piccioni che caselle (**p>c**) allora in qualche casella entreranno almeno due piccioni.

Tale principio può essere descritto anche nel modo seguente.

Il principio dei cassetti

Se n oggetti sono collocati in k cassetti, e se n>k, allora almeno un cassetto deve contenere almeno due oggetti.

Esempio.

Se ci sono 8 piccioni in 7 caselle, allora, poiché 8 > 7, almeno una casella contiene almeno 2 piccioni.

Questo è un principio semplice ma di grande utilità. Infatti può aiutarci a risolvere problemi apparentemente molto complessi: basta individuare con un po' di arguzia che cosa sono i piccioni e che cosa sono le caselle.

1. Compleanni e mesi dell'anno

Tra 25 persone ve ve ne sono almeno 3 che compiono gli anni nello stesso mese.

SOLUZIONE

Ci sono 12 cassetti a disposizione: 25 / 12 = 2 con il resto di 1, quindi in un cassetto ci andranno almeno 3 persone (3 nel caso più sfortunato).

G	F	Mar	A	Mag	G	L	A	S	O	N	D

Dopo aver distribuito due per ogni mese, me ne resta ancora uno da collocare in una delle caselle che rappresentano i mesi dell'anno.

2. Lo stesso numero di amici

Dimostrare che in un gruppo qualsiasi di persone ve ne sono almeno due che hanno lo stesso numero di amici nel gruppo stesso.

N.B. Se A è amico di B anche B è amico di A: l'amicizia è simmetrica.

Esempio

Un gruppo di 5 persone: A, B, C, D, E

- Nessuno del gruppo è amico di se stesso
- Se uno del gruppo, ad es. A, ha 0 amici allora B C D E non possono avere 4 amici (5-1), e se uno del gruppo ha 4 amici, non può esserci nessuno che ha 0 amici.
- Allora ogni persona può avere o 0 o 1 o 2 o 3, oppure o 1 o 2 o 3 o 4 amici

0 amici	1 amico	2 amici	3 amici

Oppure

1 amico	2 amico	3 amici	4 amici

SOLO 4 CASSETTI PER 5 PERSONE

in uno dei cassetti dovranno starci almeno due persone

FACCIAMO UN ESEMPIO: ALDO, BRUNO, CARLA, DARIO, ELISA si incontrano per caso. Possiamo scommettere un milione di euro, o molto di più, perché siamo assolutamente certi che nel gruppo almeno due hanno lo stesso numero di amici nel gruppo stesso, anche se sono insieme per puro caso.

Indaghiamo e scopriamo con il batticuore (avendo scommesso molto) che Aldo ha zero amici nel gruppo, Bruno ha un amico, Carla ha due amici, Dario ha tre amici.

Che sfortuna! Fino ad ora tutti con un numero diverso di amici!

In questo modo ho riempito però tutti i ***cassetti*** che avevo disponibili, ma Elisa? Quanti amici ha Elisa?

Con sollievo concludo che non potrò che sistemarla in uno dei ***quattro cassetti***.

Elisa infatti afferma di avere due amici e quindi starà insieme a Carla.

Infatti, guarda caso, Carla è da tempo amica di Dario ed Elisa è stata la sua ragazza, ma sono rimasti buoni amici, inoltre Carla ed Elisa sono amiche e Bruno è da tempo amico di Dario.

0 amici	1 amico	2 amici	3 amici
Aldo	Bruno	Carla, Elisa	Dario

- Se il gruppo è formato da m persone ci sono m-1 possibilità, e quindi m-1 cassetti e m persone da distribuire negli m-1 cassetti.

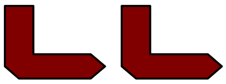
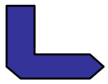
SOLUZIONE. Per ogni individuo I del gruppo, costituito da m persone, sia $n(I)$ il numero degli amici di I nel gruppo. Allora, escludendo che I si consideri amico di se stesso, $n(I)$ può assumere gli m valori $0, 1, \dots, m-1$. Osserviamo tuttavia che, per un gruppo fissato, $n(I)$ non può assumere, al variare di I, sia il valore 0 che $m-1$. Infatti, se esistesse una persona con $m-1$ amici, ogni altra avrebbe almeno un amico, e d'altra parte se esistesse una persona con zero amici, non si potrebbero avere persone con $m-1$ amici. Applicando allora il principio dei cassetti (ove le m persone sono gli oggetti da sistemare e i cassetti sono gli $m-1$ valori possibili di $n(I)$), si vede che almeno due persone vanno nello stesso cassetto, ossia hanno lo stesso numero di amici.

3. Guanti e calzini in una stanza buia

Sei in una stanza buia e devi prendere dei calzini pescando a caso in due cassetti.

In un cassetto ci sono 10 paia di calzini marroni e 10 paia blu. Quanti calzini devi prendere per essere sicuro di avere un paio di calzini dello stesso colore?

È sufficiente pescare 3 calzini. Infatti ci sono due caselle da considerare (calzini marrone-calzini blu) e il terzo deve andare per forza in una di queste due caselle.

Calzini marroni	Calzini blu
	

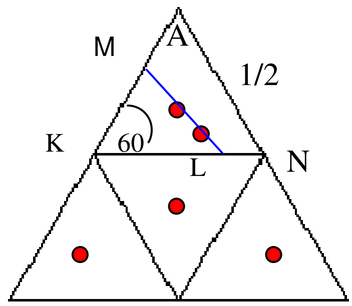
In un cassetto ci sono 10 paia di guanti marroni e 10 blu. Quanti guanti devi prendere per essere sicuro di avere un paio di guanti dello stesso colore?

In questo caso occorre tener conto che i guanti destri sono diversi da quelli sinistri.

Le possibilità colore-mano sono: MD-MS-BD-BS

Guanti marroni		Guanti blu	
Destra	Sinistra	Destra	Sinistra
10 guanti	1 guanto		10 guanti

Mi interessano solo 3 di questi quattro cassetti. Ogni cassetto può contenere 10 oggetti: quindi quando ne ho riempiti due, nella peggiore delle ipotesi ho riempito due cassetti di colore diverso (ad es. 10MD e 10BS) il 21 esimo guanto non potrà che stare in uno dei due cassetti fino ad ora vuoti. E questo risolve il problema: devo pescare 21 guanti.



4. Cinque punti in un triangolo

Provare che su 5 punti comunque scelti all'interno di un triangolo equilatero di lato 1, ve ne sono almeno due che distano meno di ½.

SOLUZIONE

Il triangolo che posso formare MKL può avere gli angoli tutti di 60 gradi, oppure uno degli altri due angoli è maggiore di 60 gradi[1]. Dato che ML è di fronte all'angolo di 60° deve essere minore di ½, dato che sia MK che anche KL sono minori di ½, o al più uguali ad ½ [2], e dato che in un triangolo "a lato maggiore sta di fronte angolo maggiore" ML non può essere il lato maggiore e non può quindi essere né maggiore, né uguale ad ½.

---

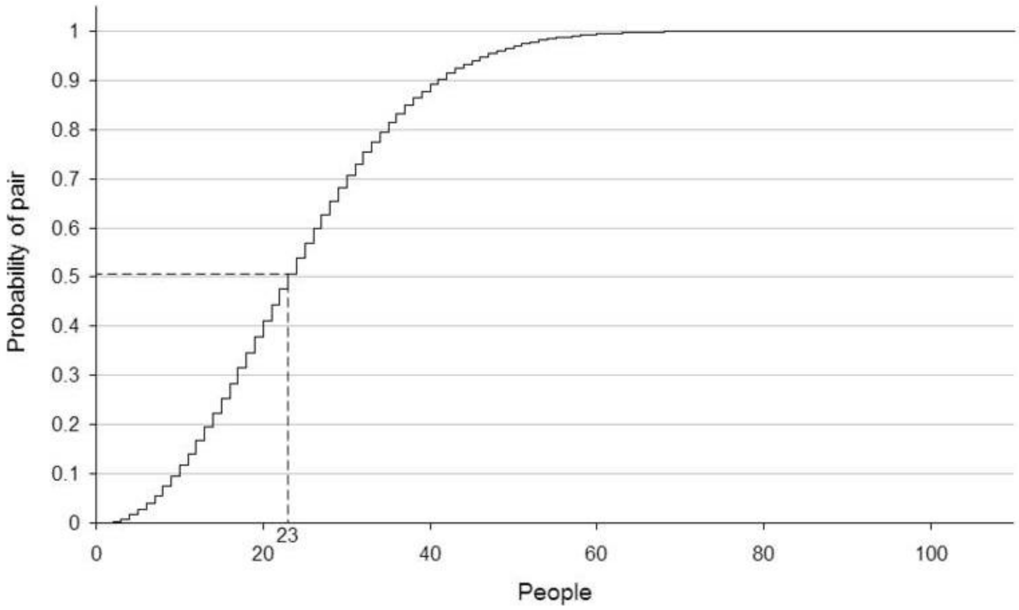
[1] Infatti se la somma è 180° e uno è 60° e gli altri due non sono tutti uguali quello che tolgo a un angolo devo aggiungerlo all'altro.

[2] KL può essere uguali ad ½ nel caso in cui i due punti fossero allineati con N, analogamente per MK se fossero allineati con A. Tieni presente che i due punti stanno all'interno del triangolo grande di lato 1.

ESERCIZI SUL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Il paradosso del compleanno

(o **problema del compleanno**) è un paradosso di teoria della probabilità definito nel 1939 da Richard von Mises.
Il paradosso afferma che la probabilità che almeno due persone in un gruppo compiano gli anni lo stesso giorno è largamente superiore a quanto potrebbe dire l'intuito: infatti già in un gruppo di 23 persone la probabilità è circa del 51%; con 30 persone essa supera il 70%, con 50 persone tocca addirittura il 97%,
anche se per arrivare all'evento certo occorre considerare un gruppo di 366 persone o più (per il principio dei cassetti).



Il grafico mostra l'andamento di *P(p)* al crescere del numero di persone

<u>PER EFFETTUARE IL CALCOLO</u>, si ricorre alla formula per la probabilità degli eventi indipendenti: per rendere più semplice il calcolo si assume che gli anni siano tutti di 365 giorni e che i compleanni siano equiprobabili, anche se ciò non è esatto. Aggiungere il giorno bisestile peggiora leggermente la probabilità, ma in compenso il fatto che i compleanni non siano equiprobabili la alza.
Il modo più semplice per calcolare la probabilità $P(p)$ che ci siano almeno due persone appartenenti ad un gruppo di p che compiano gli anni lo stesso giorno è calcolare dapprima la probabilità $P_1(p)$ che ciò non accada. Il ragionamento è questo: data una qualunque persona del gruppo (indipendentemente dalla data del suo compleanno), vi sono 364 casi su 365 in cui il compleanno di una seconda persona avvenga in un giorno diverso; se si considera una terza persona, ci sono 363 casi su 365 in cui compie gli anni in un giorno diverso dalle prime due persone e via dicendo. Esprimendo in formule quanto sopra, la probabilità che tutti i compleanni cadano in date diverse è:

$$P_1(p) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-p+1}{365} = \frac{365!}{365^p(365-p)!}$$

e dunque la probabilità del suo evento complementare, cioè che esistano due compleanni uguali, è

$$P(p) = 1 - P_1(p) = 1 - \frac{365!}{365^p(365-p)!}$$

OPPURE SI RAGIONA COME SEGUE

Vi sono ***p*** persone e 365 giorni diversi
Ogni persona può compiere gli anni in uno qualunque dei 365 giorni.
Se le persone ad esempio sono 23 si ha

I	II	III	…	XXIII	persone
365 modi	365 modi	365 modi	…	365 modi	numero di modi

Quindi $365x365x365x\ldots x365=365^{23}$
Cioè 365^{23} possibili modi di compiere gli anni per le 23 persone del gruppo.
Se le persone sono ***p*** allora ci sono 365^{p} modi di compiere gli anni per le ***p*** persone del gruppo. Chiediamoci innanzitutto quante sono le possibilità che ogni persona compia gli anni in giorni differenti?

I	II	III	…	XXIII	persone
365 modi	364 modi	363 modi	…	365 -23 +1 modi	numero di modi

Cioè ci sono 36 x 364 x 363 x … x 343 modi per le 23 persone di compiere gli anni in giorni diversi dell'anno (il 15 febbraio, il 18 luglio …)
Se le persone sono ***p***, allora

$$365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365-p+1) \text{ modi}$$

Quindi di conseguenza $\mathbf{P_1}$, la probabilità che tutte le ***p*** persone compiano gli anni in giorni diversi dell'anno, è:

$$P_1(p) = \frac{365x364x363x\ldots x(365-p+1)}{365^p}$$

Se noi vogliamo conoscere la probabilità **P** dell'eventualità "non è vero che tutti compiono gli anni in giorni diversi" e che quindi "almeno due compiano gli anni nello stesso giorno", devo scrivere la seguente relazione

$$\mathbf{P_1 + P = 1}$$

Tale relazione afferma che l'evento "tutti compiono gli anni in giorni differenti o non è vero che tutti compiono gli anni in giorni differenti" è l'evento certo, con probabilità 1 di verificarsi. Ma tale relazione afferma anche che l'evento "tutti compiono gli anni in giorni differenti o almeno due compiono gli anni nello stesso giorno", che è equivalente all'affermazione precedente, è sempre l'evento certo, quindi:

$$P = 1 - P_1 = 1 - \frac{365x364x363x\ldots x(365-p+1)}{365^p}$$

ALTRI PROBLEMI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

1. Qual è la probabilità che nel nostro gruppo almeno due facciano il compleanno nello stesso mese?
2. Si prendano a caso 3 lampadine tra 15 lampadine, di cui 5 difettose. Determinare la probabilità p che
    a. Nessuna sia difettosa
    b. Esattamente una sia difettosa
    c. Almeno una sia difettosa
3. Si scelga a caso un punto all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Determinare la probabilità che la sua distanza da ogni vertice sia maggiore di 1